POTENZSUMMEN, BERNOULLI-ZAHLEN UND EULERSCHE SUMMENFORMEL

HELMUT RICHTER   BERNHARD SCHIEKEL

Zusammenfassung. Verschiedene Möglichkeiten, eine Formel für die Summe aufeinanderfolgender m-ter Potenzen herzuleiten, werden aufgezeigt. Als eine Verallgemeinerung dieser Resultate wird die Eulersche Summenformel vorgestellt. Es wird nicht mehr als Schulmathematik im Niveau eines Leistungskurses (lineare Gleichungen, Polynome, Potenzreihen Entwicklung der Exponential-Funktion) vorausgesetzt.

Date: März 2004.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Es ist recht einfach, die Formeln für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, oder der ersten n Quadrat- oder Kubik-Zahlen mittels *vollständiger Induktion* zu beweisen - aber eben nur, wenn man diese Formeln bereits kennt. Wie aber *findet* man zu einer gegebenen natürlichen Zahl m die Formel für die Summe der ersten n m-ten Potenzen, die wir im folgenden mit $S_m(n)$ bezeichnen wollen?

Für ein fest vorgegebenes m ist diese Aufgabe relativ einfach - zumindest im Prinzip und für kleine m. Wir geben in den Kapiteln 3 und 4 zwei verschiedene Lösungswege an:
in Kapitel 3 zunächst den direkten Weg der Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms $S_m(n)$ und in Kapitel 4 den Weg über die Anwendung des *Differenzen-Kalküls* auf spezielle Polynome, sogenannte Polynome mit *fallenden Faktor-Potenzen*, bzw. *steigenden Faktor-Potenzen*. In diesem Zusammenhang treten die Stirling-Zahlen der 1. und 2. Art auf. In Kapitel 5 wird dann nach einiger Vorarbeit zur Einführung der Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen ein geschlossener Ausdruck für die $S_m(n)$ abgeleitet.

In diesem Artikel bemühen wir uns um leichte Lesbarkeit und versuchen mit den Voraussetzungen der Schulmathematik im Umfang eines Leistungskurses (lineare Gleichungen, Polynome, Potenzreihen-Entwicklung der Exponential-Funktion) auszukommen. Das Thema dieses Artikel findet sich sehr schön abgehandelt in dem Buch „Concrete Mathematics", von *Graham, Knuth, Patashnik* [1], dort allerdings über mehrere Kapitel und Übungsaufgaben verteilt und auf mehr mathematischem Vorwissen aufbauend.

Die Standard-Referenz zum Nachschlagen von Koeffizienten und Formeln im Zusammenhang mit den Stirling- und Bernoulli- Zahlen ist das „Handbook of Mathematical Functions" von *Abramowitz, Stegun* [2].

Eine erste Version dieses Artikels wurde im Juni 2000 von ***Helmut Richter*** im Internet veröffentlicht.

2. Formeln für einige kleine Potenzsummen

Sei also $S_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + n^m = \sum_{i=1}^n i^m$. Im folgenden wählen wir immer $m \in \mathbb{N},\ m > 0$, und können daher die Reihe auch mit 0^mbeginnen lassen, also $S_m(n) = \sum_{i=1}^n i^m = \sum_{i=0}^n i^m$.

Die ersten Formeln für die $S_m(n)$, die sich mittels vollständiger Induktion nach n leicht beweisen lassen, sind:

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

Einige empirische Beobachtungen lassen sich aus den obigen Formeln ablesen:
$S_m(n)$ ist ein Polynom des Grades $m+1$ in n; der führende Koeffizient ist $\frac{1}{m+1}$, der nächste $\frac{1}{2}$, der darauffolgende $\frac{m}{12}$, der nächste verschwindet und danach wird es etwas unübersichtlicher. Dass diese Gesetzmässigkeiten gelten, muss natürlich erst bewiesen werden, es genügt nicht, sie aus ein paar Beispielen zu erschliessen.

3. Bestimmung der Polynom-Koeffizienten für festes m

Der folgende Satz stellt die Basis für alle weiteren Überlegungen dar:

Satz 3.1:
Ist $f(n)$ ein Polynom m-ten Grades in n, so ist $F(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$ ein Polynom $(m+1)$-ten Grades in n.

Beweis:

Der Beweis soll durch Induktion nach dem Grad m des Polynoms $f(n)$ geführt werden.

Der Induktionsanfang ist klar, den sei der Grad von $f(n)$ gleich 1, also $f(n) = a_0 + a_1 n$, so ist $\sum_{i=1}^n f(i) = a_0 n + a_1(\frac{1}{2}n(n+1)) = (a_0 + \frac{1}{2}a_1)n + \frac{1}{2}a_1 n^2$.

Jetzt sei $f(n)$ ein Polynom m-ten Grades in n und der Satz 3.1 sei gültig für Polynome $(m-1)$-ten Grades in n. Zunächst konstruieren wir ein Hilfs-Polynom m-ten Grades $g(n)$, welches summiert ein Polynom $(m+1)$-ten Grades ergibt:

$$g(n) = (n+1)^{m+1} - n^{m+1} = \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{m+1} n^0$$

Hier sind die $\binom{m+1}{i} = \frac{(m+1)!}{i!\,(m+1-i)!}$ die übliche Binominal-Koeffizienten und $g(n)$ ist also vom Grade m.

Für dieses Hilfs-Polynom $g(n)$ können wir nun leicht die obige Summe bilden und stellen fest, dass diese Summe, wie gewünscht, ein Polynom $(m+1)$-ten Grades ist:

$$g(1) + g(2) + \ldots + g(n) =$$

$$(2^{m+1} - 1^{m+1}) + (3^{m+1} - 2^{m+1}) + \ldots + (n^{m+1} - (n-1)^{m+1}) = (n+1)^{m+1} - 1$$

Die Polynome $f(n)$ und $g(n)$ sind also beide vom Grade m, haben also beide nicht verschwindende Höchstkoeffizienten $f_m$und g_m. Sei jetzt $r = f_m/g_m$, dann folgt, dass das Polynom $(f(n) - r \cdot g(n))$ von kleinerem Grade als m ist und somit nach Induktions-Voraussetzung als ein Polynom höchstens m-ten Grades von 1 bis n summierbar ist. Unser ursprüngliches Polynom $f(n)$ lässt sich jetzt aber darstellen als $f(n) = (f(n) - r \cdot g(n)) + r \cdot g(n)$ und dieses ist somit summierbar von 1 bis n als die Summe eines Polynoms höchstens m-ten Grades plus eines Polynoms $m+1$-ten Grades. $\square$

Wir wissen jetzt also, das $S_m(n)$ ein Polynom $(m+1)$-ten Grades ist. Um dieses Polynom zu finden, brauchen wir also nur noch seine $(m+2)$ Koeffizienten zu bestimmen. Der nächste Satz 3.2 soll zeigen, dass wir aus $(m+2)$ Stützstellen dieses Polynom immer eindeutig konstruieren können.

Satz 3.2:
Seien die $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und die $y_0,\ y_1, \ldots,\ y_m \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es genau ein Polynom f höchstens m-ten Grades mit $f(x_i) = y_i$, für $i = 0,\ 1, \ldots,\ m$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit: Gäbe es 2 Polynome m-ten Grades f und g, die an allen $(m+1)$ Stützstellen $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_m \in \mathbb{R}$ übereinstimmen, so hätte das Polynom höchstens m-ten Grades $(f-g)$ mindestens $(m+1)$ Nullstellen, nämlich alle Stützstellen. Da ein Polynom m-ten Grades aber maximal m Nullstellen haben kann, muss $(f-g)$ das Nullpolynom sein, also müssen f und g übereinstimmen.

Jetzt zeigen wir die Existenz, indem wir explizit ein solches Polynom m-ten Grades mit $f(x_i) = y_i$, für $i = 0,\ 1, \ldots,\ m$, konstruieren.

$$g_i(x) = \prod_{j=1,\ i \neq j}^{m} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

ist ein Polynom m-ten Grades mit den Eigenschaften $g_i(x_i) = 1$ und $g_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$. Damit gilt für das Polynom m-ten Grades $f(x) = g_0(x) \cdot y_0 + g_1(x) \cdot y_1 + \ldots + g_m \cdot y_m$ gerade die geforderte Eigenschaft $f(x_i) = y_i$, für $i = 0,\ 1, \ldots,\ m$. $\square$

Beispiel:

Sei also $S_4(n) = \sum_{i=1}^{n} i^m$ ein Polynom 5. Grades in n:
$S_4(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + a_4 n^4 + a_5 n^5$.

$$S_4(0) = a_0 = 0$$

$$S_4(1) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$$

$$S_4(2) = 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 1 + 16 = 17$$

$$S_4(3) = 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 + 243a_5 = 1 + 16 + 81 = 98$$

$$S_4(4) = 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 + 1024a_5 = 1 + 16 + 81 + 256 = 354$$

$$S_4(5) = 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 625a_4 + 3125a_5 = 1 + 16 + 81 + 265 + 625 = 979$$

Dies ist nun ein lineares Gleichung-System mit fünf Gleichungen für die fünf unbekannten Koeffizienten a_i, welches wir sukzessive auflösen:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 17 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 98 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 354 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 979 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 14 & 30 & 15 \\ 0 & 6 & 24 & 78 & 240 & 95 \\ 0 & 12 & 60 & 252 & 1020 & 350 \\ 0 & 20 & 120 & 620 & 3120 & 974 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 15/2 \\ 0 & 1 & 4 & 13 & 40 & 95/6 \\ 0 & 1 & 5 & 21 & 85 & 175/6 \\ 0 & 1 & 6 & 31 & 156 & 487/10 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & -6 & -14 & -13/2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 15/2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 25 & 25/3 \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 70 & 65/3 \\ 0 & 0 & 3 & 24 & 141 & 206/5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 6 & 36 & -13/2+50/3=(-39+100)/6=61/6 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -60 & -35/2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 25 & 25/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 20 & 15/3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 66 & (206-125)/5=81/5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -24 & (61-90)/6=-29/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 50 & (-35+55)/2=10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -35 & (25-45)/3=-20/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & (81-75)/5=6/5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -29/6+24/5=(-145+144)/30=-1/30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10-10=0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -20/3+7=1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (5-4)/2=1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \quad \square$$

Man sieht, dieser Weg ist gangbar, aber für grössere m doch recht mühsam. Daher soll im folgenden Kapitel ein anderer Ansatz aufgezeigt werden.

4. Differenzen-Kalkül

Wir sind oben auf Ausdrücke der Form $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ gestossen, aber auch auf Ausdrücke der Form $g(n+1) - g(n)$. Diese Ausdrücke lassen sich als ganzzahlige Analoga zur reelwertigen Integration und Differentiation ansehen. Der Differenzen-Kalkül definiert auf diese Weise eine *diskrete Integration* und eine *diskrete Differentiation.* Nun ist aber die diskrete Ableitung einer m -ten Potenz, nämlich $(n+1)^m - n^m$ nicht einfach eine $(m-1)$-te Potenz, sondern ein komplizierterer Ausdruck mit Binominal-Koeffizienten. Man kann sich nun damit helfen, dass man kompliziertere Polynome definiert, nämlich Polynome mit *fallenden Faktor-Potenzen*, bzw. mit *steigenden Faktor-Potenzen* (auch *Faktorielle* genannt), für welche dann wieder einfache diskrete Differentiations- und Integrations-Regeln gelten.

Im folgenden sollen diese Polynome mit *fallenden Faktor-Potenzen* und mit *steigenden Faktor-Potenzen* definiert und ihr Zusammenhang mit den Sterling-Zahlen der 1. und 2. Art gezeigt werden, so dass wir dann unser Potenzsummen-Problem durch eine einfach diskrete Integration lösen können. Sei also wie oben stets $m \in \mathbb{N},\ m > 0$:

Definition der fallende Faktor-Potenz:

$$\text{Def:}\quad x^{\underline{m}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-m+1) = \prod_{i=0}^{m-1} (x-i) \tag{4.1}$$

Definition der steigenden Faktor-Potenz:

$$\text{Def:}\quad x^{\overline{m}} = x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+m-1) = \prod_{i=0}^{m-1} (x+i) \tag{4.2}$$

Einige einfache Eigenschaften der Faktor-Potenzen sieht man sofort:

$$1^{\underline{m}} = 0, \quad x^{\underline{1}} = x^{\overline{1}} = x, \quad (-x)^{\overline{m}} = (-1)^m x^{\underline{m}} \tag{4.3}$$

$$x^{\underline{m}} = x^{\underline{m-1}} \cdot (x-m+1), \quad x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}} \cdot (x-m)^{\underline{n}} \tag{4.4}$$

$$x^{\overline{m}} = x^{\overline{m-1}} \cdot (x+m-1), \quad x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}} \cdot (x+m)^{\overline{n}} \tag{4.5}$$

Zunächst betrachten wir die Frage der „diskreten Differentiation" mit fallenden Faktor-Potenzen:

$$\begin{aligned} (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} &= \frac{(x+1)!}{(x+1-m)!} - \frac{x!}{(x-m)!} = \frac{[(x+1)! - (x+1-m) \cdot x!]}{(x+1-m)!} \\ &= \frac{[(x+1) \cdot x! - (x+1-m) \cdot x!]}{(x-(m-1))!} = \frac{m \cdot x!}{(x-(m-1))!} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = m \cdot x^{\underline{m-1}} \tag{4.6}$$

Wir sehen also, dass die fallenden Faktor-Potenzen gerade so gewählt sind, dass sie beim „diskreten Differentieren" das gleiche Vehalten zeigen, wie normale Potenzen beim normalen Differentieren.

Für die Summation, bzw. das „diskrete Integrieren" gilt etwas Analoges, denn aus 4.6 folgt:

$$x^{\underline{m}} = \frac{1}{(m+1)}\left((x+1)^{\underline{m+1}} - x^{\underline{m+1}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{m}} &= 1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + \ldots + n^{\underline{m}} \\ &= \frac{1}{(m+1)}[(2^{\underline{m+1}} - 1^{\underline{m+1}}) + (3^{\underline{m+1}} - 2^{\underline{m+1}}) + \ldots + ((n+1)^{\underline{m+1}} - n^{\underline{m+1}})] \\ &= \frac{1}{(m+1)}[(n+1)^{\underline{m+1}} - 1^{\underline{m+1}}] \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\underline{m}} = \frac{1}{(m+1)}(n+1)^{\underline{m+1}} \tag{4.7}$$

Wir sehen also, dass wir Polynome in fallenden Faktor-Potenzen sehr einfach summieren können - damit stellt sich aber als nächstes die Frage, wie wir möglichst einfach und systematisch normale Potenzen in fallende Faktor-Potenzen und wieder zurück transformieren können.

Die Sterling-Zahlen der 2. Art, die wir *Graham, Knuth, Patashnik* [1] folgend hier als $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ bezeichnen wollen, sind nun gerade so definiert, dass sie die Transformation von normalen Potenzen in fallende Faktor-Potenzen vermitteln:

$$\text{Def.:} \quad x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \tag{4.8}$$

Aus 4.4 folgt: $\quad x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k) \quad \Rightarrow \quad x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}} \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} = x \cdot x^{n-1} = x \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt die folgende Rekursionsformel für die Stirling-Zahlen 2. Art:

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} \tag{4.9}$$

Die Sterling-Zahlen der 1. Art, die wir *Graham, Knuth, Patashnik* [1] folgend hier als $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$ bezeichnen wollen, stellen in gewisser Weise die Umkehr-Transformation zu den Sterling-Zahlen 2. Art dar, indem sie von steigenden, bzw. fallenden Faktor-Potenzen in normalen Potenzen vermitteln:

$$\text{Def.:} \quad x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] x^k \tag{4.10}$$

Mit 4.3 folgt:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] x^k \tag{4.11}$$

(Man beachte: *Abramowitz, Stegun* definieren die $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$ wie in 4.9, doch ohne den Faktor $(-1)^{n-k}$.)

Auch für die Stirling-Zahlen 1. Art $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$ lässt sich eine Rekursionsformel analog zu 4.9 angeben:

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] x^k = (x+n-1) \cdot x^{\overline{n-1}} = (x+n-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right] x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right] x^k \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt die folgende Rekursionsformel für die Stirling-Zahlen 1. Art:

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right] + (n-1)\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right] \tag{4.12}$$

Beispiel:

$$S_4(n) = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array}\right\} i^{\underline{0}} + \left\{\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right\} i^{\underline{1}} + \left\{\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right\} i^{\underline{2}} + \left\{\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right\} i^{\underline{3}} + \left\{\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array}\right\} i^{\underline{4}}\right]$$

Aus 4.9 folgen die Sterling-Zahlen der 2.Art:

k	0	1	2	3	4
$\left\{\begin{array}{c} 4 \\ k \end{array}\right\}$	0	1	7	6	1

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \sum_{i=1}^{n}(i^{\underline{1}} + 7i^{\underline{2}} + 6i^{\underline{3}} + i^{\underline{4}}) = \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{1}} + \sum_{i=1}^{n} 7i^{\underline{2}} + \sum_{i=1}^{n} 6i^{\underline{3}} + \sum_{i=1}^{n} i^{\underline{4}}) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^{\underline{2}} + \frac{7}{3}(n+1)^{\underline{3}} + \frac{6}{4}(n+1)^{\underline{4}} + \frac{1}{5}(n+1)^{\underline{5}}. \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir dieses Polynom mit *fallenden Faktor-Potenzen* nur noch mit Hilfe der Sterling-Zahlen der 1.Art (nach 4.10) in ein Polynom mit normalen Potenzen zurück transformieren.

k	0	1	2	3	4	5
$\left[\begin{array}{c} 2 \\ k \end{array}\right]$	0	1	1			
$\left[\begin{array}{c} 3 \\ k \end{array}\right]$	0	2	3	1		
$\left[\begin{array}{c} 4 \\ k \end{array}\right]$	0	6	11	6	1	
$\left[\begin{array}{c} 5 \\ k \end{array}\right]$	0	24	50	35	10	1

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{2}[(-1)^1\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right](n+1)^1 + (-1)^0\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array}\right](n+1)^2] + \\ &\quad \frac{7}{3}[(-1)^2\left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right](n+1)^1 + (-1)^1\left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right](n+1)^2 + (-1)^0\left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array}\right](n+1)^3] + \\ &\quad \frac{3}{2}[(-1)^3\left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right](n+1)^1 + (-1)^2\left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right](n+1)^2 + (-1)^1\left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right](n+1)^3 + \\ &\quad\quad (-1)^0\left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array}\right](n+1)^4] + \\ &\quad \frac{1}{5}[(-1)^4\left[\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array}\right](n+1)^1 + (-1)^3\left[\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right](n+1)^2 + (-1)^2\left[\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right](n+1)^3 + \\ &\quad\quad (-1)^1\left[\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array}\right](n+1)^4 + (-1)^0\left[\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array}\right](n+1)^5] \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_4(n) &= \frac{1}{2}[-(n+1)^1 + (n+1)^2] + \\
&\quad \frac{7}{3}[2(n+1)^1 - 3(n+1)^2 + (n+1)^3] + \\
&\quad \frac{3}{2}[-6(n+1)^1 + 11(n+1)^2 - 6(n+1)^3 + (n+1)^4] + \\
&\quad \frac{1}{5}[24(n+1)^1 - 50(n+1)^2 + 35(n+1)^3 - 10(n+1)^4 + (n+1)^5] \\
&= \frac{1}{30}[6(n+1)^5 + (45-60)(n+1)^4 + (70-270+210)(n+1)^3 + \\
&\quad (15-210+495-300)(n+1)^2 + (-15+140-270+144)(n+1)^1] \\
&= \frac{1}{30}[6(n+1)^5 - 15(n+1)^4 + 10(n+1)^3 - (n+1)] \\
&= \frac{1}{5}[(n+1)^5 - \frac{5}{2}(n+1)^4 + \frac{5}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{6}(n+1)] \, .
\end{aligned}
$$

Dieses Polynom in $n+1$ kann schliesslich noch als Polynom in n entwickelt werden:

$$
\begin{aligned}
S_4(n) &= \frac{1}{5}[(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + \\
&\quad \frac{-5}{2}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + \\
&\quad \frac{5}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \\
&\quad \frac{-1}{6}(n+1)\,] \\
&= \frac{1}{5}[n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}(6 - 15 + 10 - 1)\,] \\
&= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \, . \quad \square
\end{aligned}
$$

5. Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen

Mithilfe der Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen läßt sich eine geschlossene Lösung des Problems der Potenzsummen angeben. Dies erfordert zunächst etwas Vorarbeit bei der Definition der Bernoulli-Polynome und der Bernoulli-Zahlen und beim Beweis einiger ihrer charakteristischen Eigenschaften - umso einfacher wird dann aber die allgemeine Lösung der Potenzsummen.

Die Bernoulli-Polynome $B_m(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ (oder auch allgemeiner $B_m(z)$ für $z \in \mathbb{R}$) werden üblicherweise indirekt über eine erzeugende Funktion, d.h. als Koeffizienten einer Potenzreihe definiert. Sei $|x| < 2\pi$, um die Konvergenz der Potenzreihe der Exponentialfunktion zu gewährleisten:

$$
\text{Def.:} \quad \frac{x\,\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(n)\,\frac{x^m}{m!} \tag{5.1}
$$

Wenn wir dies etwas umschreiben, die Exponentialfunktionen als Potenzreihen entwickeln und einen Koeffizientenvergleich durchführen, so erhalten wir eine erste Rekursionsformel für die $B_m(n)$, der man dann auch schon ansieht, dass es sich bei den $B_m(n)$ tatsächlich um Polynome in n handelt.

$$e^{nx} = (\frac{e^x - 1}{x})\,(\sum_{m=0}^{\infty} B_m(n)\,\frac{x^m}{m!})$$

$$(1 + \frac{nx}{1!} + \frac{(nx)^2}{2!} + \ldots + \frac{(nx)^m}{m!} + \ldots) =$$

$$(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^m}{(m+1)!} + \ldots)\,(B_0(n) + B_1(n)\,\frac{x}{1!} + \ldots + B_m(n)\,\frac{x^m}{m!} + \ldots)$$

$$\Rightarrow \quad B_0(n) = 1\,; \quad \text{und} \quad \frac{B_0(n)\,x}{2!} + \frac{B_1(n)\,x}{1!} = \frac{nx}{1!}\,; \quad \text{also } B_1(n) = n - \frac{1}{2}\,;$$

$$\frac{(nx)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{m-k}}{(m-k+1)!}\,B_k(n)\,\frac{x^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad n^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{B_k(n)}{(m-k+1)} \quad \Rightarrow$$

$$B_m(n) = n^m - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{B_k(n)}{(m-k+1)} \tag{5.2}$$

Die Bernoulli-Zahlen $B_m := B_m(0)$ werden implizit definiert, indem wir in der erzeugenden Funktion für die Bernoulli-Polynome $n = 0$ setzen, also:

$$\text{Def.:} \quad \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m\,\frac{x^m}{m!} \tag{5.3}$$

Aus den obigen Ausdrücken für die $B_m(n)$ folgt mit $n = 0$ sofort:

$$B_0 = 1\,; \quad B_1 = -\frac{1}{2}\,; \quad B_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{B_k}{(m-k+1)} \quad \text{für } m > 1 \tag{5.4}$$

Außerdem sind alle ungeraden B_m für $m > 1$ gleich Null. Dies kann man folgendermaßen einsehen. Wir entfernen aus der obigen erzeugenden Funktion der Bernoulli-Zahlen den $m = 1$ Term, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{x}{2}$ addieren:

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = B_0 + \sum_{m=2}^{\infty} B_m\,\frac{x^m}{m!}$$

Wegen

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\,\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$$

bleibt dieser Ausdruck beim Ersetzen von x durch $-x$ unverändert, oder anders gesagt, seine Parität ist gerade. Also muß auch die Parität von $B_0 + \sum_{m=2}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!}$ gerade sein - und das ist nur möglich, wenn alle ungeraden B_m für $m > 1$ gleich Null sind.

Mit den Bernoulli-Zahlen können wir jetzt eine direkte Polynom Darstellung der Bernoulli-Polynome angeben:

$$\frac{x\,e^{nx}}{e^x - 1} = (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(nx)^i}{i!})\,(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\,\frac{x^k}{k!}) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(n)\,\frac{x^m}{m!}$$

Ein Koeffizientenvergleich für x^m ergibt:

$$\frac{B_m(n)}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{B_k}{k!} \frac{n^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$B_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k\, n^{m-k} \tag{5.5}$$

Wichtig und hilfreich ist auch die folgende Formel für $B_m(n+1) - B_m(n)$:

$$\frac{x\,\mathrm{e}^{(n+1)x}}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{x\,\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} (B_m(n+1) - B_m(n))\, \frac{x^m}{m!}$$

$$\frac{x\,\mathrm{e}^{(n+1)x}}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{x\,\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x\,\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x - 1}\,(\mathrm{e}^x - 1) = x\,\mathrm{e}^{nx} = \sum_{m=0}^{\infty} x\, \frac{(nx)^m}{m!}$$

$$B_m(n+1) - B_m(n) = m\, n^{m-1} \tag{5.6}$$

Hieraus können wir jetzt endlich unsere gewünschte Formel für die Potenzsummen ableiten, indem wir von $B_{m+1}(n+1)$ rekursiv auf $B_{m+1}(0) = B_{m+1}$ absteigen:

$$\begin{aligned}
B_{m+1}(n+1) &= (m+1)\, n^m + B_{m+1}(n) \\
&= (m+1)\, (n^m + (n-1)^m + B_{m+1}(n-1)) \\
&= (m+1)\, (\sum_{i=0}^{n} i^m + B_{m+1}(0)) \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_m(n) = \sum_{i=0}^{n} i^m = \frac{1}{m+1}\, (B_{m+1}(n+1) - B_{m+1})} \quad \square \tag{5.7}$$

Beispiel:

Aus 5.7 und 5.5 folgt für $S_4(n)$:

$$S_4(n) = \sum_{i=0}^{n} i^4 = \frac{1}{5}[B_5(n+1) - B_5] =$$

$$\Bigg[\frac{1}{5} \binom{5}{0} B_0 \cdot (n+1)^5 + \binom{5}{1} B_1 \cdot (n+1)^4 + \binom{5}{2} B_2 \cdot (n+1)^3 +$$

$$\binom{5}{3} B_3 \cdot (n+1)^2 + \binom{5}{4} B_4 \cdot (n+1)^1 + \binom{5}{5} B_5 \cdot (n+1)^0 - B_5\Bigg]$$

Aus 5.4 folgen die Bernoulli-Zahlen B_k:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_k	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$

und damit folgt für $S_4(n)$:

$$S_4(n) = [(n+1)^5 - \frac{5}{2}(n+1)^4 + \frac{5}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{6}(n+1)]$$

Dieses Polynom in $n+1$ kann schliesslich noch als Polynom in n entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
S_4(n) &= \frac{1}{5}[(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + \\
&\quad \frac{-5}{2}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + \\
&\quad \frac{5}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \\
&\quad \frac{-1}{6}(n+1)\,] \\
&= \frac{1}{5}[n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}(6 - 15 + 10 - 1)\,] \\
&= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Man sieht, dass der Weg über die Bernoulli-Polynome zu einer Potenzsummen-Formel $S_m(n)$ für eine spezielle Potenz m im Vergleich mit den beiden anderen vorgestellten Methoden aus Kapitel 3 und 4 deutlich einfacher und übersichtlicher ist - die Komplexität des Problems verbirgt sich hier letztlich in der Konstruktion der Bernoulli-Zahlen.

6. Eulersche Summenformel

Wir hatten mit 5.7 gezeigt, dass wir eine endliche Summe ($i = 0..n$) von Potenzen i^m, bei festem m, als ein Bernoulli-Polynom in $n+1$ darstellen können. Jetzt kann man sich natürlich fragen, ob sich dieses Resultat von Potenz-Funktionen $f(i) = i^m$ vielleicht auch auf andere Funktionen $f(i)$ verallgemeinern lässt. Leonhard Euler, Colin Maclaurin und später S. D. Poisson haben gezeigt, dass dies möglich ist.

Für $a, b, n \in \mathbb{N}$: $a \leq b$, $n \geq 1$ und für hinreichend gutartige Funktionen $f(x)$, z.B. beliebig oft stetig-differenzierbare Funktionen, gilt die **Eulersche Summenformel**:

$$\boxed{\sum_{i=a}^{b-1} f(i) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_n} \tag{6.1}$$

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_a^b \frac{B_n(\{x\})}{n!} f^{(n)}(x)dx = (-1)^{n+1}(b-a)\frac{B_n(\{\hat{x}\})}{n!} f^{(n)}(\hat{x}) \tag{6.2}$$

Dabei sei $\{x\} = x - [x] = x \mod 1$ der Dezimalbruchteil von x und $\hat{x}$ sei ein Wert im Intervall $]a,b[$, d.h. $a < \hat{x} < b$. Natürlich muss die Frage der Konvergenz, bzw. Endlichkeit der jeweiligen Ausdrücke in jedem Einzelfall konkret untersucht werden. Der rechte Ausdruck für R_n aus 6.2 ergibt sich aus dem linken Ausdruck einfach durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (was für gewisse Fehlerabschätzungen interessant sein mag, aber hier nicht weiter ausgeführt werden soll).

Vor einem Beweis wollen wir uns als erstes unseren oben schon gelösten Fall der Potenzsummen, d.h. der Summen über $f(i) = i^m$, anschauen:

$$f(x) = x^m \quad \Rightarrow \quad f^{(k-1)}(x) = \frac{m!}{(m-k+1)!}\,x^{m-k+1}\,, \quad f^{(m)}(x) = m!\,, \quad f^{(m+1)}(x) = 0\,.$$

Wenn wir in 6.1 als Summationsgrenze $n = m+1$ wählen, dann ist wegen $(x^m)^{(m+1)} = 0$ auch $R_n = R_{m+1} = 0$.

$$S_m(p) = \sum_{i=0}^{p} i^m = \int_0^{p+1} x^m dx + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{B_k}{k!} \left.(x^m)^{(k-1)}\right|_0^{p+1}$$

$$= \frac{1}{m+1} \left.x^{m+1}\right|_0^{p+1} + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(m+1)} \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!} \frac{B_k}{k!} \left.(x^{m+1-k})\right|_0^{p+1}$$

$$= \frac{1}{(m+1)} \sum_{k=0}^{m+1} \left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right) B_k \left.(x^{m+1-k})\right|_0^{p+1}$$

$$= \frac{1}{(m+1)} \left(B_{m+1}(p+1) - B_{m+1}\right) \quad \square$$

Damit haben wir unser früheres Ergebnis aus 5.7 reproduziert.

Jetzt soll die Eulersche Summenformel 6.1, 6.2 bewiesen werden - dabei folgen wir im wesentlichen dem Beweis von *Graham, Knuth, Patashnik* [1].

Zunächst wollen wir 6.1, 6.2 für das spezielle Intervall $a = 0$ und $b = 1$ beweisen, d.h. wir wollen zeigen:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!} \left.f^{(k-1)}(x)\right|_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!} f^{(n)}(x)dx \tag{6.3}$$

Wir wählen den Weg der vollständigen Induktion nach n. Sei also für den Induktions-Anfang $n = 1$:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) + \int_0^1 B_1(x)\, f^{(1)}(x)dx$$

Wir setzen $B_1(x) = (x - \frac{1}{2})$ (siehe 5.5) ein und führen in diesem Integral eine partielle Integration durch:

$$\frac{1}{2}(f(1) + f(0)) = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (x - \frac{1}{2})\, f^{(1)}(x)dx$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \left.(x - \frac{1}{2})\, f(x)\right|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(0)\,.$$

Damit ist also der Induktions-Anfang gezeigt.

Jetzt soll der Schritt von $n-1$ nach n, mit $n > 1$, gezeigt werden. Dabei wollen wir wieder im letzten Term eine partielle Integration durchführen und benötigen also sowohl den Wert von $B_n(x)$ bei 1 und 0, wie auch die Ableitung $B_n^{(1)}(x)$. Aus 5.6 folgt für $n > 1$: $B_n(1) - B_n(0) = n \cdot 0^{m-1} = 0$. Also gilt für $n > 1$: $B_n(1) = B_n(0) = B_n$.

Für die Ableitung $B_n^{(1)}(x)$ gilt nun (siehe 5.5):

$$B_n^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\, x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)\, B_k\, x^{n-k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} B_k\, x^{n-1-k} = n\, B_{n-1}(x)\,.$$

Der Induktionsschritt von $n-1$ nach n in 6.3 ist dann richtig, wenn wir zeigen können:

$$R_{n-1} = \frac{B_n}{n!}\, f^{(n-1)}(x)\Big|_0^1 + R_n \quad \Rightarrow$$

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}\, f^{(n-1)}(x)dx = \frac{B_n}{n!}\, f^{(n-1)}(x)\Big|_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}\, f^{(n)}(x)dx$$

$$= \frac{B_n}{n!}\, f^{(n-1)}(x)\Big|_0^1 - (-1)^n \frac{B_n(x)}{n!}\, f^{(n-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n^{(1)}(x)}{n!}\, f^{(n-1)}(x)dx$$

$$\frac{B_n}{n!}\, f^{(n-1)}(x)\Big|_0^1 - (-1)^n \frac{B_n(x)}{n!}\, f^{(n-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}\, f^{(n-1)}(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$0 = \frac{B_n}{n!}\, [f^{(n-1)}(1) - (f^{(n-1)}(0)] - (-1)^n [\frac{B_n(1)}{n!}\, f^{(n-1)}(1) - \frac{B_n(0)}{n!}\, f^{(n-1)}(0)]$$

$$= \frac{B_n}{n!}\, [f^{(n-1)}(1) - (f^{(n-1)}(0)] - (-1)^n [\frac{B_n}{n!}\, f^{(n-1)}(1) - \frac{B_n}{n!}\, f^{(n-1)}(0)$$

$$= (1 - (-1)^n)\, \frac{B_n}{n!}\, [f^{(n-1)}(1) - (f^{(n-1)}(0)]\,.$$

Da für $n > 1$ alle ungeraden $B_n = 0$ sind und für die geraden n der Faktor $(1 - (-1)^n)$ verschwindet, ist somit der Induktionsschritt von $n-1$ nach n und damit die Gültigkeit von 6.3 gezeigt.

Wenn für die Funktion $f(x)$ die Gleichung 6.3 gilt, dann gilt diese Gleichung auch für eine Funktion $\hat{f}(x) = f(x+\mathrm{i})$:

$$f(0+i) = \int_0^1 f(x+i)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!}\, f^{(k-1)}(x+i)\Big|_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!} f^{(n)}(x+i)dx$$

$$= \int_i^{i+1} f(y)dy + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!}\, f^{(k-1)}(y)\Big|_i^{i+1} + (-1)^{n+1} \int_i^{i+1} \frac{B_n(y-i)}{n!} f^{(n)}(y)dy$$

$$= \int_i^{i+1} f(y)dy + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k!}\, f^{(k-1)}(y)\Big|_i^{i+1} + (-1)^{n+1} \int_i^{i+1} \frac{B_n(\{y\})}{n!} f^{(n)}(y)dy\,.$$

Wenn wir in diesem Ausdruck die Variable y wieder in x umbenennen und die Summe $\sum_{i=a}^{b-1} f(i)$ bilden, erhalten wir gerade die Eulersche Summelformel 6.1, 6.2 . $\square$

7. Ausblick

Die Eulersche Summenformel stellt ein überaus mächtiges Hilfsmittel für Summationen und asymptotische Entwicklungen dar. Wenn man sie in Verbindung mit inversen Potenzsummen der Form $\sum_{i=1}^{n} i^{-m}$ mit $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ bringt, gelangt man zur Eulerschen Zeta-Funktion, bzw. bei einer Verallgemeinerung auf komplexe Argumente zur Riemann'schen Zeta-Funktion.

Diese Zeta-Funktion wiederum stellt einen Zusammenhang sowohl mit der Primzahl-Theorie als auch mit der transzendenten Zahl π her und taucht darüberhinaus auch in physikalischen Problemen auf, etwa bei Fragen der Vielteilchen-Quantenphysik (z.B. Bose-Einstein-Kondensation). Die wichtige Frage der Verteilung der Nullstellen der Zeta-Funktion (Riemann'sche Vermutung) ist immer noch ungeklärt und Gegenstand der Forschung.

8. Bibliographie

[1] Concrete Mathematics, *Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,* Addison-Wesley, Boston, USA, 1994, ISBN: 0-201-55802-5.

[2] Handbook of Mathematical Functions, *Milton Abramowitz, Irene A. Stegun,* Dover Publications, New York, USA, 1970, ISBN: 0-486-61272-4.

[3] Programmieren mit Perl, *L. Wall, T. Christiansen, R. L. Schwartz,* O´Reilly, Köln, 1998, ISBN: 3-930673-48-7.

9. Anhang: Berechnung der Bernoulli-Zahlen

Mit dem folgenden kleinen Perl-Programm (zu Perl, siehe etwa: *Wall, Christiansen, Schwartz* [3]) haben wir nach der Rekursions-Formel 5.4 die ersten 80 Bernoulli-Zahlen B_i berechnet (dabei hatten wir bereits oben abgeleitet, dass alle ungeraden $B_{2i+1} = 0$ für $i \geq 1$). Es wurde für die Berechnung der B_i das Perl-Modul `Math::BigRat` für die Lang-Rationalzahl Arithmetik verwendet. Zuvor wurde eine Tabelle mit den benötigten Binomialkoeffizienten $\binom{m}{k}$ mit dem Perl-Modul `Math::BigInt` für Lang-Ganzzahl Arithmetik berechnet. Die Binomialkoeffizienten wurden nicht über die die Rechenzeit-aufwändigen Fakultäten bestimmt, sondern über die folgende bekannte Rekursionsformel (die nur Additionen verwendet):

$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$, dies folgt unmittelbar aus der Definition der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \frac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-k)!} + \frac{(m-1)!}{k!\,(m-k-1)!} = \frac{(m-1)!\,k+(m-1)!\,(m-k)}{k!\,(m-k)!} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \binom{m}{k}$$

```
#!/usr/bin/perl -w
#
###############################################################################
# Perl-Script bernoulli
#
# berechnet die Bernoulli-Zahlen mit langer Rationalzahl-Arithmetik
# mit Hilfe der Perl-Module Math::BigInt und Math::BigRat
#
# Author: B. Schiekel <mb.schiekel@arcor.de>,
# Copyright (C) 2004, B. Schiekel, D-89073 ULM.
#
# This program is free software and distributed under the terms of the
# GNU General Public License version 2 or later.
###############################################################################

use Math::BigInt;
use Math::BigRat;

$n    = 0;
$help = 0;

if (defined @ARGV) {
  foreach $arg (@ARGV) {
    if ($arg =~ /-n=([0-9]+)/) {$n    = $1;}
    if ($arg =~ /--help/)      {$help =  1;}
    if ($arg =~ /-h/)          {$help =  1;}
  }
}

if ($help) {
  print("\n");
  print("Aufruf: bernoulli [OPTION]\n");
  print("\n");
  print("Berechnet die Bernoulli Zahlen mit langer Rationalzahl-Arithmetik \n");
  print("und schreibt diese in die Datei bernoulli.dat \n");
  print("\n");
  print("-n=m           [mit m = grösste zu berechnende Bernoilli-Zahl] \n");
  print("--help         this help\n");
  print("-h             this help\n");
  print("\n");
  exit(0) ;
}

if ($n == 0) {
  print("\n");
  print("B[0] = 1 , wenn Sie mehr wissen wollen, sollten Sie aufrufen:\n");
  print("bernoulli -n=m  [mit m = grösste zu berechnende Bernoulli-Zahl] \n");
  print("\n");
```

```
  exit(0);
}

# zunächst berechnen wir die Binomial-Koeffizienten,
# (i|0) = (i|i) = 1;
for ($i=0; $i<=$n; $i++) {
  $binom[$i][0]  = Math::BigInt->new(1);
  $binom[$i][$i] = Math::BigInt->new(1);
}
# (i|1) = (i|i-1) = i;
if ($n >= 2) {
  for ($i=2; $i<=$n; $i++) {
    $binom[$i][1]    = Math::BigInt->new($i);
    $binom[$i][$i-1] = Math::BigInt->new($i);
  }
}
# (i|j) = (i-1|j) + (i-1|j-1)
if ($n >= 4) {
  for ($i=4; $i<=$n; $i++) {
    for ($j=2; $j<=$i-1; $j++) {
      $binom[$i][$j] = Math::BigInt->new(0);
      $binom[$i][$j] = $binom[$i-1][$j] + $binom[$i-1][$j-1];
    }
  }
}

# jetzt berechnen wir die Bernoulli-Zahlen
$b[0] = Math::BigRat->new('1');
$b[1] = Math::BigRat->new('-1/2');
# Achtung: ab i>=2 sind nur die geraden b[i] definiert
for ($i=2; $i<=$n; $i+=2) {
  $b[$i] = Math::BigRat->new('0');
  for ($j=0; $j<=$i-1; $j++) {
#   ab j>=2 werden nur die geraden b[j] aufsummiert
    if ($j<=2 || $j==2*int($j/2)) {
      $b[$i] = $b[$i] - ($b[$j] * $binom[$i][$j] / ($i-$j+1));
    }
  }
}

# wir schreiben die Ergebnisse auf Datei
# Achtung: ab i>=2 sind nur die geraden b[i] definiert
open(DAT,">bernoulli.dat") ||
  die "cannot open bernoulli.dat \n";
for ($i=0; $i<=$n; $i++) {
  if ($i<=2 || $i==2*int($i/2)) {
    print(DAT "B[$i] = ",$b[$i]->bstr(),"\n");
  }
}
close(DAT) ||
  die "cannot close bernoulli.dat \n";
#bernoulli
```

Bernoulli-Zahlen B_i für $0 \leq i \leq 80$ (alle ungeraden $B_{2i+1} = 0$ für $i \geq 1$) .

<table>
<tr>
<td>B[0] = 1
B[1] = -1/2
B[2] = 1/6
B[4] = -1/30
B[6] = 1/42
B[8] = -1/30
B[10] = 5/66
B[12] = -691/2730
B[14] = 7/6
B[16] = -3617/510
B[18] = 43867/798</td>
<td>B[20] = -174611/330
B[22] = 854513/138
B[24] = -236364091/2730
B[26] = 8553103/6
B[28] = -23749461029/870
B[30] = 8615841276005/14322
B[32] = -7709321041217/510
B[34] = 2577687858367/6
B[36] = -26315271553053477373/1919190
B[38] = 2929993913841559/6
B[40] = -261082718496449122051/13530</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">B[42] = 1520097643918070802691/1806
B[44] = -27833269579301024235023/690
B[46] = 596451111593912163277961/282
B[48] = -5609403368997817686249127547/46410
B[50] = 495057205241079648212477525/66
B[52] = -801165718135489957347924991853/1590
B[54] = 29149963634884862421418123812691/798
B[56] = -2479392929313226753685415739663229/870
B[58] = 84483613348880041862046775994036021/354
B[60] = -1215233140483755572040304994079820246041491/56786730
B[62] = 12300585434086858541953039857403386151/6
B[64] = -106783830147866529886385444979142647942017/510
B[66] = 1472600022126335654051619428551932342241899101/64722
B[68] = -78773130858718728141909149208474606244347001/30
B[70] = 1505381347333367003803076567377857208511438160235/4686
B[72] = -5827954961669944110438277244641067365282488301844260429/140100870
B[74] = 34152417289221168014330073731472635186688307783087/6
B[76] = -24655088825935372707687196040585199904365267828865801/30
B[78] = 414846365575400828295179035549542073492199375372400483487/3318
B[80] = -4603784299479457646935574969019046849794257872751288919656867/230010</td>
</tr>
</table>